Feuille Homographies

Exercice[Birapport 1] Pour un quadruplet (x, y, z, t) de points distincts de $\hat{\mathbf{C}}$, on note :

$$[x : y : z : t] := \frac{(x-y)(z-t)}{(y-z)(t-x)}$$

leur birapport.

1. Montrer que $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbf{C}})$ est engendré par les similitudes $z \mapsto az + b$ et par $z \mapsto \dfrac{1}{z}$.
2. En déduire que les homographies préservent le birapport.
3. Montrer que le birapport $[x : y : z : t]$ est réel si et seulement si les 4 points sont cocycliques (ou alignés).
4. Conclure que les homographies préservent l'ensemble des droites et cercles de $\mathbf{C}$.

Exercice[Birapport 2] On définit la dérivée schwarzienne d'une fonction holomorphe f non constante par

$$S(f) = \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2$$

1. Vérifier que $S(f \circ g) = S(f) \circ g (g')^2 + S(g)$.
2. Résoudre $S(h) = 0$. (Les solutions sont exactement les homographies)
3. En déduire qu'un biholomorphisme $\varphi : U \to V$ préserve la dérivée schwarzienne (*i.e.* $\forall f$, $S(\varphi \circ f) = S(f)$) si et seulement si φ est la restriction d'une homographie.
4. Montrer qu'un biholomorphisme $\varphi : U \to V$ préserve le birapport (*i.e.* $\forall z \in \mathbf{C}^4$, $[z_0 : z_1 : z_2 : z_3] = [\varphi z_0 : \varphi z_1 : \varphi z_2 : \varphi z_3]$) si et seulement si φ est la restriction d'une homographie.

Exercice [Groupes d'homographies 1]

1. Montrer que $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ s'identifie à $\mathrm{PSU}(1, 1)$.
2. Montrer que $\{g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C}) \mid g(\hat{\mathbf{R}}) = \hat{\mathbf{R}}\} = \mathrm{PGL}_2(\mathbf{R})$ et donner un élement dans $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{R})$ qui ne soit pas dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$.
3. Montrer que $\{g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C}) \mid g(\mathbb{H}) = \mathbb{H}\} = \mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$, puis que $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) = \mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$.

Exercice [Groupes d'homographies 2]

1. Montrer que la projection stéréographique est conforme.
2. En déduire un morphisme injectif de $\mathrm{SO}(3)$ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$.
   Nous noterons Rot l'image de ce morphisme.
3. Montrer que si $\varphi \in \mathrm{Rot}$ alors $\varphi(-1/\overline{z}) = -1/\overline{\varphi(z)}$. En déduire que $\varphi \in \mathrm{PSU}(2)$.
4. Soit $\varphi \in \mathrm{PSU}(2)$. Montrer qu'il existe $h \in \mathrm{Rot}$ telle que $h \circ \varphi(0) = 0$. En déduire que $\varphi \in \mathrm{Rot}$.